نظريات بناخ و كنان و شاترجيا للنقطة الثابتة في فضاءات مترية مختلفة

إعداد

غدير محمد سعيد الردادي

بحث مقدم لنيل درجة الماجستير في العلوم

(رياضيات / تحليل دالي)

إشراف

المشرف الرئيسي: أ.د. سعود مستور السلمي

المشرف المشارك: د. منيرة عمر الأنصاري

كلية العلوم

جامعة الملك عبد العزيز

جدة – المملكة العربية السعودية

ربيع الثاني ١٤٤٢ هـ – نوفمبر 2020 م

المستخلص

في هذه الأطروحة، سوف ندرس بعض نظريات النقطة الثابتة على فضاءات مختلفة. وسنناقش نظرية انكماش بناخ في الفضاء المتري إلى جانب نظريتين أخريتين للنقطة الثابتة وهما نظرية كنان للنقطة الثابتة ونظرية شاترجيا للنقطة الثابتة. بالإضافة إلى ذلك، سيتم دراسة هذه النظريات على فضاءات مختلفة مثل الفضاء المتري ب، والفضاء المتري المستطيل والفضاء المستطيل المتري ب. كما سنستعرض الانكماش الضعيف في الفضاء المتري، ثم سنطبق هذا المفهوم على نظرية انكماش بناخ في الفضاء المتري. أخيرًا، سنناقش انكماش بناخ الضعيف وانكماش كنان الضعيف على فضاء متري مستطيل.

ملخص الرسالة

يمكن تعريف النقطة الثابتة على أنه مجموعة غير خالية X وتطبيق T من X إلى نفسها، وبالتالي يسمى كل حل للمعادلة $Tx = x$ نقطة الثابتة لـ T . تعد نظرية النقطة الثابتة فرعًا رئيسيًا للتحليل الدالي غير الخطي نظرًا لتطبيقاتها الواسعة مثل تطبيقها لإثبات وجود حل للمعادلات التفاضلية والتكاملية. أول من أسس نظرية النقطة الثابتة هو بناخ في عام ١٩٢٢, والتي تنص على إذا كان لدينا (X, d) فضاء متري تام وكان تطبيق$T: X \to X$ تقليصا على X فإنه يوجد لـT نقطة ثابتة وحيدة. يتم اثبات ذلك باستخدام تقارب تكرارات بيكارد. تم استخدام هذه المبرهنة على نطاق واسع في العديد من المجالات المختلفة.

كما هو معروف أن مبدأ انكماش بناخ في الفضاء المتري يجب ان يكون التطبيق T متصل. ولكن في عام ١٩٦٨ أنشأ كنان نسخه جديدة للنقطة الثابتة بدون افتراض أي يكون التطبيق T متصل باستخدام نفس إجراء تقارب النقطة الثابتة الذي استخدمه بناخ

في عام ١٩٧٢، أثبت شاترجيا نظرية جديدة للنقطة الثابتة دون افتراض اتصال T باستخدام نفس إجراء التقارب في اثبات بناخ.

في عام ١٩٨٩ بدأت فكرة الفضاء المتري ب من عمل باختين وبوربكي. حيث تم تعريفه رسميًا بواسطة Czerwik في عام ١٩٩٣. وتم تطبيق نظرية انكماش بناخ على هذا الفضاء. الفضاء المتري ب أعم من الفضاء المتري وعند دراسة هذا الفضاء سوف نلاحظ اختلافات ما بين الفضاء المتري ب والفضاء المتري مثل d في الفضاء المتري تكون متصلة وليس بالضرورة ان تكون متصلة في الفضاء المتري ب. هناك العديد من المؤلفين الذين عملوا على نشر أبحاث لنظريات النقطة الثابتة في الفضاء المتري ب .

في عام ٢٠٠٠، قدم برانسياري فضاء متري جديد تم تعريفه بالفضاء المتري المعمم والذي يتم فيه استبدال متباينة المثلث بالمتباينة الرباعية. سمي بعد ذلك بالفضاء المتري المستطيل أو الرباعي. يختلف الفضاء المتري المستطيل عن الفضاء المتري، في العديد من الجوانب مثل تطبيق T ليس متصلا في الفضاء المتري المستطيل وليس من الضروري أن يكون الفضاء المتري المستطيل فضاء هاسدروف. تم نشر العديد من النتائج في نظريات النقطة الثابتة في الفضاء المتري المستطيل

في عام ٢٠١٥، قام العالم جورج وآخرون ب دمج الفضاء المتري ب والفضاء المتري المستطيل وسمي الفضاء الجديد بالفضاء المستطيل المتري ب. وأصبح هذا الفضاء فضاء عام للفضاء المتري،

والفضاء المتري المستطيل والفضاء المتري ب. جورج وعلماء آخرون. أثبتوا العديد من نتائج النقطة الثابتة في الفضاء المستطيل المتري ب.

في عام ٢٠٠٣، قدم فاسيلي بيريندي تعريف جديد يسمى الانكماش الضعيف وأثبت ضعف مبدأ انكماش بناخ في الفضاء المتري.

إن هذه الأطروحة مقسمة الى خمسة أبواب:

في الباب الأول، نقدم التعريفات الأساسية والنتائج الأساسية في نظريات النقطة الثابتة مثل مبدأ بناخ للتقلص، ونظرية كنان للنقطة الثابتة، ونظرية شاترجيا للنقطة الثابتة في الفضاء المتري.

الباب الثاني، نقدم مفهوم الفضاء المتري ب ونثبت مبدأ تقلص بناخ ونظرية كنان للنقطة الثابتة ونظرية شاترجيا للنقطة الثابتة في هذا الفضاء.

الباب الثالث، سندرس الفضاء المتري المستطيل ونقدم بعض الأمثلة. كما سيتم دراسة مبدأ تقلص بناخ ونظرية كنان للنقطة الثابتة ونظرية شاترجيا للنقطة الثابتة في الفضاء المتري المستطيل.

الباب الرابع، نناقش مفهوم الفضاء المستطيل المتري ب الذي يوضح الفرق بين الفضاء المستطيل المتري ب والفضاءات الأخرى. أيضًا، ندرس مبدأ بناخ للتقلص، ونظرية كنان للنقطة الثابتة ونظرية شاترجيا للنقطة الثابتة على هذا الفضاء.

في الباب الأخير، تم تقديم مفهوم الانكماش الضعيف وخصائصه. ويتكون هذا الباب من ثلاثة فصول. في الفصل الأول، تمت مناقشة انكماش بناخ الضعيف في الفضاء المتري، بينما في الفصلين الثاني والثالث تمت دراسة تطبيق انكماش بناخ الضعيف وانكماش كنان الضعيف في الفضاء المتري المستطيل.

Banach, Kannan and Chatterjea fixed point theorems over different metric spaces

By

Ghadeer Mohammad Saeed Alraddadi

A thesis submitted for the requirements of the degree of
Master of Science (Mathematics - Functional analysis)

Supervised by: Prof. Saud M. Alsulmai

Co - supervisor: Dr. Monairah O. Alansari

Faculty of Science
King Abdulaziz University
Jeddah - Saudi Arabia

Rabea II 1442 A.H. - November 2020 A.D.

Abstract

In this thesis, we will study some fixed point theorems over different spaces. We will discuss Banach contraction theorem in metric space along with two other fixed points theorems namely Kannan fixed point theorem and Chatterjea fixed point theorem. Moreover, we will observe these theorems in different spaces such as b-metric space, rectangular metric space and rectangular b-metric space. Also, we will learn about weak contraction on metric space, then we will apply this concept on Banach contraction theorem in metric space. Finally, we will discuss what we call the weak Banach contraction and the weak Kannan contraction on rectangular metric space.

Introduction

The definition of fixed point could be defined as nonempty set X and a mapping $T: X \to X$, every solution of the equation $Tx = x$ is called fixed point of T. The fixed point theory is a major branch of nonlinear functional analysis due to its wide applications such as that fixed point theorems can be used to prove the existence of a solution to the differential and integral equation.

Regarding the metric fixed point theory, we recall an early work of Banach in 1922 [1] which states that every contraction mapping T of a complete metric space (X, d) into itself has a unique fixed point. This is essentially done by using the convergence of Picard iterates. Again, this theorem has been extensively used in the study of solution of various operator equation, including numerical approximation.

Note that the mapping in Banach contraction in metric space need to be continues. R. Kannan, in 1968 [2], establishes a new fixed point result by assuming a contractive condition which do not imply the continuity of T.

In 1972, Chatterjea [3] proved a fixed point theory assuming a contractive condition which do not imply the continuity of T using the same convergence procedure as Banach.

In 1989, the idea of b-metric was initiated from the work Bakhtin [4] and Bourbaki [5]. Which was formally defined by Czerwik in 1993 [6] where the generalizing of Banach theory was applied. However, unlike the usual metric the b-metric d is not continuous in the topology generated by it. The class of b-metric spaces is larger than that of metric space. There are many authors who have worked on the generalization of fixed point theorems in b-metric spaces [7], [8].

In 2000, Branciari [9] introduced a generalized metric space which was defined as a metric space in which the triangle inequality is replaced by quadrilateral inequality which it was later called rectangular or a quadrilateral metric space. The rectangular metric space differs from the metric space, in many aspects such as the mapping T is not continuous in rectangular metric space and it is not necessary a Hausdorff space. To establish more results in fixed point theorem in rectangular metric space please consult [10], [11], [12], [13].

Recently, there was a combination of the b-metric space and rectangular metric space which introduced in 2015, George et al. [14] presented the rectangular b-metric space which was a general form of the metric space, rectangular metric space and b-metric space. Latterly George et al. proved many fixed point results in the rectangular b-metric space [14], [15], [16], [17].

In 2003, Vasile Berinde [18] defined the weak contraction mapping and proved the weak Banach contraction principle in metric space.

This thesis is divided into five chapters:

In chapter 1, we present the basic definitions and fundamental results on fixed point theories such as Banach Contraction Principle, Kannan fixed point theorem and Chatterjea fixed point theorem in metric space.

Chapter 2, we introduce the concept of the b-metric space and we prove the Banach Contraction Principle, Kannan fixed point theorem and Chatterjea fixed point theorem in this space.

Chapter 3, we discuss the rectangular metric space and we present some examples. Then, we study the Banach Contraction Principle, Kannan fixed point theorem and Chatterjea fixed point theorem in the rectangular metric space.

Chapter 4, we present the concept of rectangular b-metric space showing the difference between the rectangular b-metric space and the other spaces. Also, we discuss the Banach Contraction Principle, Kannan fixed point theorem and Chatterjea fixed point theorem on that space.

In the last chapter, the concept of weak contraction and its properties was introduced. This chapter consists of three sections. In the first section, the weak Banach contraction was discussed, in the second section, we proved the weak Banach contraction in rectangular metric space and in the last section, we proved the weak Kannan contraction in rectangular metric space.